# Definició i exemples

D'ara endavant, si no diem el contrari, $K$ indicarà un cos commutatiu. Un *espai vectorial sobre* $K$ és un conjunt $E$ no buit junt amb

1. una operació $+$, que anomenarem *suma*, que compleix les següents propietats:

   - és associativa: $\vec{\mathbf{u}}+(\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}})=(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}})+\vec{\mathbf{w}} \qquad \forall\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\in E$
   - és commutativa: $\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{u}} \qquad \forall\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}\in E$
   - hi ha un element $\vec{\mathbf{0}}$ tal que $\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{u}} \qquad \forall\vec{\mathbf{u}}\in E$
   - per tot $\vec{\mathbf{u}}\in E$ hi ha un altre element, que es denota per $-\vec{\mathbf{u}}$, tal que $\vec{\mathbf{u}}+(-\vec{\mathbf{u}})=\vec{\mathbf{0}}$

2. una aplicació

$$\begin{aligned} K\times E &\to E \\ (a,\vec{\mathbf{u}}) &\mapsto a\vec{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

que anomenarem *producte per elements de* $K$, que compleix

- $a(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}})=a\vec{\mathbf{u}}+a\vec{\mathbf{v}} \qquad \forall a\in K,\ \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}\in E$
- $(a+b)\vec{\mathbf{u}}=a\vec{\mathbf{u}}+b\vec{\mathbf{u}} \qquad \forall a,b\in K,\ \vec{\mathbf{u}}\in E$
- $(ab)\vec{\mathbf{u}}=a(b\vec{\mathbf{u}}) \qquad \forall a,b\in K,\ \vec{\mathbf{u}}\in E$
- $1\vec{\mathbf{u}}=\vec{\mathbf{u}} \qquad \forall\vec{\mathbf{u}}\in E$, on 1 és la unitat del cos $K$.

Observem que 1 diu que $(E,+)$ és un grup commutatiu. Els elements de $E$ els anomenarem *vectors,* els de $K$ *escalars*. Farem servir la notació $\vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{v}}$ per indicar $\vec{\mathbf{u}}+(-\vec{\mathbf{v}})$.

De la definició es dedueix fàcilment:

- $0\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{0}}$. En efecte, $0\vec{\mathbf{v}}=(0+0)\vec{\mathbf{v}}=0\vec{\mathbf{v}}+0\vec{\mathbf{v}}\Rightarrow 0\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{0}}$.
- $a\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$. En efecte, $a\vec{\mathbf{0}}=a(\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}})=a\vec{\mathbf{0}}+a\vec{\mathbf{0}}\Rightarrow a\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$.
- $a\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{0}}\Rightarrow a=0$ o $\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{0}}$. En efecte, si $a\neq 0$, $a$ té un invers $a^{-1}$. Llavors $\vec{\mathbf{v}}=1\vec{\mathbf{v}}=(a^{-1}a)\vec{\mathbf{v}}=a^{-1}(a\vec{\mathbf{v}})=a^{-1}\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$.
- $(-1)\vec{\mathbf{v}}=-\vec{\mathbf{v}}$. En efecte, $\vec{\mathbf{v}}+(-1)\vec{\mathbf{v}}=1\vec{\mathbf{v}}+(-1)\vec{\mathbf{v}}=(1+(-1))\vec{\mathbf{v}}=0\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{0}}$.

# Subespais vectorials

Sigui $E$ un espai vectorial sobre $K$. Un subconjunt no buit $F\subset E$ es diu un *subespai vectorial de* $E$ si

1. $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}\in F\Rightarrow\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}\in F$
2. $\vec{\mathbf{u}}\in F, k\in K\Rightarrow k\vec{\mathbf{u}}\in F$.

Aquestes dues condicions ens diuen que les operacions de $E$ permeten definir unes operacions a $F$. Observem que amb aquestes operacions $F$ és automàticament un espai vectorial sobre $K$.

Un vector $u$ és *combinació lineal* dels vectors $v_1, \dots, v_n$ si existeixen $a^1, \dots, a^n \in K$ tals que

$$\boxed{u = a^1 v_1 + \dots + a^n v_n}.$$

De les condicions 1 i 2 de la definició de subespai vectorial resulta que tota combinació lineal de vectors $v_1, \dots, v_n$ de $F$ és un vector de $F$.

**Proposició 2.1** *Si $S$ és un subconjunt d'un espai vectorial $E$, el conjunt $\langle S \rangle$ és el més petit dels subespais vectorials de $E$ contenen $S$.*

Si $\langle S \rangle = F$ es diu que $S$ *genera* $F$, que $F$ està generat per $S$ o que $S$ és un *sistema de generadors* de $F$.

# Bases d'un espai vectorial

Un conjunt de vectors $S$ es diu *linealment independent* si tota combinació lineal de vectors de $S$ nul·la té tots els coeficients nuls: $a^1 v_1 + \dots + a^m v_m = \vec{\mathbf{0}}$, $v_i \in S$, $i = 1, \dots, m \Rightarrow a^1 = \dots = a^m = 0$. En cas contrari direm que $S$ és *linealment dependent*

**Proposició 3.1** $v_1, \dots, v_m$ *són linealment dependents si i només un d'ells és combinació lineal dels altres.*

Una *base* d'un espai vectorial $E$ és un sistema de generadors linealment independents.

**Proposició 3.2** $B \subset E$ *és una base de $E$ si i només si tot $u \in E$ s'expressa de manera única com una combinació lineal d'elements de $B$.*

**Observació:**

Si $S$ és linealment independent, $S$ és base de $\langle S \rangle$.

**Proposició 3.3** *Si $S$ és linealment independent i $u \notin \langle S \rangle$, llavors $S \bigcup \{u\}$ és linealment independent.*

**Teorema 3.4** *Tot espai vectorial $E \neq \{\vec{\mathbf{0}}\}$ generat per un nombre finit de vectors té una base finita.*

Tot sistema de generadors conté una base.

**Teorema 3.5 (de Steinitz.)** *Sigui $u_1, \dots, u_n$ una base de $E$ i siguin $v_1, \dots, v_m$ vectors linealment independents. Aleshores es poden substituir $m$ vectors de la base $u_1, \dots, u_n$ per $v_1, \dots, v_m$ obtenint una nova base. En particular, $m \leq n$.*

**Corol·lari 3.6** *Si l'espai vectorial $E$ té una base finita, totes les bases de $E$ tenen el mateix nombre de vectors.*

La *dimensió* d'un espia vectorial $E$ sobre un cos $K$ és el nombre d'elements de les seves bases, si són finites. En cas contrari, direm que $E$ és de dimensió infinita.

**Corol·lari 3.7** *La dimensió d'un espai coincideix amb el nombre màxim d'elements linealment independents, i també amb el nombre mínim de generadors.*

**Corol·lari 3.8** *Tot conjunt de vectors linealment independents pot completar-se fins a obtenir una base.*

**Proposició 3.9** *Sigui $F$ un subespai de l'espai vectorial $E$. Si la dimensió de $E$ és finita, la de $F$ també i*

$$\dim F \leq \dim E.$$

*A més a més,*

$$\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$$

# Fórmula de Grassmann. Suma directa de subespais.

Sigui $E$ un espai vectorial i $F$, $G$ dos subespais de $E$.

**Proposició 4.1** $F \cap G$ *és un subespai vectorial de* $E$.

Per evitar el treball amb conjunts que no són subespais vectorials, normalment considerem, en comptes de la unió $F \cup G$, el subespai vectorial generat per aquesta unió. Aquest subespai és precisament

$$\{u+v \mid u \in F, v \in G\}$$

En efecte, és fàcil veure que aquest és el més petit dels subespais que contenen $F$ i $G$. En direm *suma* de $F$ i $G$ i el designarem per $F+G$.

**Teorema 4.2 (Fórmula de Grassmann)** *Siguin $F$ i $G$ dos subespais vectorials de $E$ i suposem que la dimensió de $E$ és finita. Aleshores $F$, $G$, $F \cap G$ i $F+G$ són tots de dimensió finita i*

$$\boxed{\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)}$$

Si $F \cap G = \{\vec{0}\}$ direm que la suma $F+G$ és una *suma directa* i escriurem

$$F \oplus G.$$

**Proposició 4.3** *La suma $F+G$ és directa si i només si l'expressió d'un vector de $F+G$ com a suma d'un vector de $F$ i un vector de $G$ és única.*

**Proposició 4.4** *Si la dimensió de* $E$ *és finita, per a tot subespai* $F$ *hi ha un altre subespai* $G$ *tal que* $E = F \oplus G$.

El subespai esmentat a (4.4) es diu un *complementari de* $E$. $F$ té, en general, molts complementaris.

La generalització de suma directa presenta més dificultats. Així, direm que la suma $F_1 + \ldots + F_k$ és *suma directa* i escriurem

$$F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$$

si l'expressió de tot vector de $F_1 + \ldots + F_k$ com a suma de vectors de $F_1, \ldots, F_k$ és única.

# Suma directa d'espais vectorials

**Proposició 5.1** *Si* $E$ *i* $F$ *són de dimensió finita,* $E \oplus F$ *també i* $\dim E \oplus F = \dim E + \dim F$.

# Espai vectorial quocient

Sigui $E$ un espai vectorial i $F$ un subespai vectorial de $E$. Direm que $u, v \in E$ estan *relacionats mòdul* $F$ si $u - v \in F$. Aquesta relació és d'equivalència i es pot formar el corresponent conjunt quocient que designarem per $E/F$.

**Proposició 6.1** *Si* $E$ *és de dimensió finita,* $E/F$ *també ho és i*

$$\boxed{\dim E/F = \dim E - \dim F}$$

# Coordenades

**Proposició 7.1** *Les matrius dels canvis de base són sempre invertibles.*