APLICACIONES LINEALES ENTRE ESPACIOS NORMADOS

Definición 1: Dados dos espacios vectoriales X e Y sobre el mismo cuerpo $K(=R \text{ o } C)$ se dice que una aplicación $T : X \to Y$ es lineal si verifica las siguientes propiedades:

I. $T(x+y)=T(x)+T(y)\ \ \forall x, y \in X$.

II. $T(\lambda x)=\lambda T(x)\ \ \forall \lambda \in K,\ \forall x \in X$.

Teorema 1: Dados dos espacios normados $\{X, \|\cdot\|_1\}$ e $\{Y, \|\cdot\|_2\}$ definidos sobre el mismo cuerpo K y dada una aplicación lineal $T : X \to Y$, las siguientes propiedades son equivalentes:

i) $T : \{X, \|\cdot\|_1\} \to \{Y, \|\cdot\|_2\}$ es continua en todo X.

ii) $T : \{X, \|\cdot\|_1\} \to \{Y, \|\cdot\|_2\}$ es continua en 0.

iii) El conjunto $T(B(0,1)) \subset Y$ es acotado.

iv) Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_2 \le C\|x\|_1 \text{ para todo } x \text{ en } X$$

Proposición 1: Dada una aplicación lineal $T : \{X, \|\cdot\|_1\} \to \{Y, \|\cdot\|_2\}$, si el espacio vectorial X s de dimensión finita, entonces T es continua.

Definición 2: dad una aplicación lineal y continua $T : \{X, \|\cdot\|_1\} \to \{Y, \|\cdot\|_2\}$ se define T como:

$$\|T\| = \sup\left\{\|T(x)\|_2 ; x \in B^c(0,1)\right\}$$