Formulari d'EDO **www.campanadegauss.cat**

Factor integrant

$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\equiv G(x)\Rightarrow \mu(x)=e^{\int \mathrm{d}x G(x)}$
$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\equiv H(y)\Rightarrow \mu(y)=e^{\int \mathrm{d}y H(y)}$

Equacions lineals homogènies de 1r grau

$y'=-P(x)y\Rightarrow y=Ce^{-\int \mathrm{d}x P(x)}$
$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0\Rightarrow$ canvi $y=ux; x=vy$

Equació de Bernoulli

$y'+P(x)y=f(x)y^n\Rightarrow$ canvi $u=y^{1-n}$

Equació de Ricatti

$y'=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2$
trobem $y_p\Rightarrow y(x)=u(x)+y_p(x)$
$u'=Qu+2Ryu+Ru^2$

Reducció

$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$
$y_1$solució $\Rightarrow y_2=y_1\int \mathrm{d}x\frac{1}{y_1^2}e^{-\int \mathrm{d}x a_1/a_2}$
$y=c_1y_1+c_2y_2$

Coeficients constants

$ay''+by'+cy=0$
$m_1$real: $e^{m_1x}, xe^{m_1x},\ldots,x^{k-1}e^{m_1x}$
$m_1=\alpha+i\beta\Rightarrow e^{\alpha x}\cos\beta, xe^{\alpha x}\cos\beta,\ldots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta$
$m_2=\alpha-i\beta\Rightarrow e^{\alpha x}\sin\beta, xe^{\alpha x}\sin\beta,\ldots,x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta$

Inhomogènies: $Ly=g(x)$

$g(x)=b_lx^l+\ldots+b_0 \quad\Rightarrow y_p=A_{l+k}x^{l+k}+\ldots+A_kx^k$
$g(x)=e^{\gamma x} \quad\Rightarrow y_p=Ae^{\gamma x}$
$g(x)=\cos\beta x,\sin\beta x \quad\Rightarrow y_p=A\cos\beta x+B\sin\beta x$

Variació paràmetres

$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$
y_1,y_2solucions de l'homogènia
$W_1=\begin{vmatrix}0 & y_2\\ f(x) & y_2'\end{vmatrix} \quad W_2=\begin{vmatrix}y_1 & 0\\ y_1' & f(x)\end{vmatrix}$
$y_p=u_1y_1+u_2y_2 \quad u_k'=\frac{W_k}{W}$

Equació de Cauchy - Euler

$a_nx^ny^{(n)}+...+a_0y=g(x)$; $a_1=$ constant
canvi $x=e^t,\ t=\ln x,\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$

Equacions no lineals de segon grau

No hi ha y o x (explícitament): canvi $u=y'$

Sèries de potències

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$al voltant de x_0
$P(x),Q(x)$analítiques $\Rightarrow y=\sum c_n(x-x_0)^n$
$xP(x),x^2Q(x)$analítiques $\Rightarrow y=x^r\sum c_nx^n$
$r(r-1)+p_0r+q_0=0$

Equació d'Airy

$y''-xy=0$; al voltant de $x=0$
$c_{3k}=\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3k-2)}{(3k)!}c_0$
$c_{3k+1}=\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3k-1)}{(3k+1)!}c_1$
$c_{3k+2}=0$
$y_1(x)=1+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot4}{6!}x^6+\ldots$
$y_2(x)=x+\frac{2}{4!}x^4+\frac{2\cdot5}{7!}x^7+\ldots$
$y(x)=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$
$A_i(x)\equiv\frac{3^{-2/3}}{\Gamma(2/3)}(y_1(x)-y_2(x))$
$B_i(x)\equiv\frac{3^{-2/3}}{\Gamma(2/3)}(y_1(x)+y_2(x))$

Equació d'Hermite

$y''-2xy'+2\alpha y=0$; al voltant de $x=0$
$c_{2n}=(-1)^n\frac{2^n\cdot\alpha\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-2(n-1))}{(2n)!}c_0$
$c_{2n+1}=(-1)^n\frac{2^n\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-3)\cdot\ldots\cdot(\alpha-2n+1))}{(2n+1)!}c_1$
$y(x)=c_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{2n}}{c_0}x^{2n}\right)+c_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_1}x^{2n+1}\right)$

Polinomis d'Hermite

$\alpha=2p\Rightarrow$ la sèrie és un polinomi de grau $2p$
$\alpha=2p+1\Rightarrow$ la sèrie és un polinomi de grau $2p+1$
$c_0=(-1)^p\frac{(2p)!}{p!}$; $c_1=(-1)^p\frac{2(2p+1)!}{p!}$
$H_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{l!}{k!(l-2k)!}(2x)^{l-2k}$
$H_n(-x)=(-1)^nH_n(x)$
$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}$
$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)t^n$
$H_n'(x)=2nH_{n-1}$

Equació de Legendre

$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$, al voltant de $x=0$
$c_{2n}=(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha-2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2n-1)}{(2n)!}c_0$
$c_{2n+1}=(-1)^n\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha-3)\ldots(\alpha+2n)}{(2n+1)!}c_1$
$y(x)=c_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{2n}}{c_0}x^{2n}\right)+c_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_1}x^{2n+1}\right)$

Polinomis de Legendre

$\alpha=n$ (parell) $\Rightarrow y_1=N_nP_n(x)$
$\alpha=n$ (senar) $\Rightarrow y_2=N_nP_n(x)$
$N_n=(-1)^{n/2}\frac{(n-1)!!}{n!!}$; $n=2,4,6,\ldots$
$N_n=(-1)^{(n-1)/2}\frac{(n)!!}{(n-1)!!}$; $n=3,5,7,\ldots$
$P_l(x)=\frac{1}{2^ll!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$
$P_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^lk!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$
$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0$
$P_l(-x)=(-1)^lP_l(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$

Polinomis associats de Legendre

$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)$; $m=0,1,2,\ldots$
$(1-x^2)y''-2xy'+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$

Equació de Bessel

$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$; $r=\pm\nu$
$c_0=\frac{1}{2^r\Gamma(1+r)}$
$c_{2n}=(-1)^n\frac{1}{2^{2n+r}n!\Gamma(1+r+n)}$
$J_r(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}x^{2n+r}$
$e^{\frac{x(t-1/t)}{2}}=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(x)t^n$
$J_{\nu+1}(x)=\frac{2\pi}{x}J_\nu(x)-J_{\nu-1}(x)$

Equació de Laguerre

$xy''+(1-x)y'+ny=0$

Transformada de Laplace

$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t f(t)e^{-st}=F(s)$

Propietats

$\mathcal{L}[f^{(n)}]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{n-1}(0)$
$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)]=F(s-a)$
$\mathcal{L}[f(t-a)\Theta(t-a)]=e^{-as}F(s)$
$\mathcal{L}[t^nf(t)]=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s)$

Transformades bàsiques

$\mathcal{L}[t^n]=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
$\mathcal{L}[e^{\alpha t}]=\frac{1}{s-\alpha}$
$\mathcal{L}[\sin\beta t]=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
$\mathcal{L}[\cos\beta t]=\frac{s}{s^2+\beta^2}$
$\mathcal{L}[\sinh\beta t]=\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$
$\mathcal{L}[\cosh\beta t]=\frac{s}{s^2-\beta^2}$

Sistemes d'Equacions Diferencials

$c_iv_ie^{\lambda_it}$; $c_i\left(v_i1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}+\ldots\right)e^{\lambda_it}$
$X_p=\Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)F(t)dt$