ESPACIOS DE HILBERT

Definición 1: Dado un espacio vectorial X sobre el cuerpo $K(= \mathrm{R} \text{ o } C)$, se dice que una función $\langle , \rangle : H \times H \to K$ es un **producto escalar** si verifica las siguientes propiedades:

1. $\langle , \rangle$ es lineal en la primera componente:

$\langle \lambda x + \beta y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H$ y $\forall \lambda, \beta \in K$.

2. $\langle , \rangle$ es casi-lineal en la segunda componente:

$\langle x, +\lambda y + \beta z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H$ y $\forall \lambda, \beta \in K$.

3. $\langle , \rangle$ es antisimétrica:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \forall x, y \in H .$$

4. $\langle , \rangle$ es positiva:

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$$

5. $\langle , \rangle$ es degenerada:

$$\langle x, x \rangle = 0 \leftrightarrow x = 0$$

Cada espacio vectorial H dotado de un producto escalar $\langle , \rangle$ forma un espacio **prehilbert** que se denota por $\{H, \langle , \rangle\}$.

Proposición 1: Sea $\{H, \langle , \rangle\}$ un espacio prehilbert. Para todo par de vectores $x, y \in H$ se verifican las siguientes desigualdades:

Desigualdad de Schwarz

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Desigualdad de Minkowski

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

Definición 2: Cuando un espacio prehilbert $\{H, \langle , \rangle\}$ es completo se denomina espacio de Hilbert

Definición 3: Dado un espacio prehilbert $\{H, \langle , \rangle\}$ se dice que dos vectores x e y en H son ortogonales si verifican que

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Se dice que una familia de vectores no nulos $W \subset H$ es un sistema ortogonal si todo par de vectores distintos x, y en W son ortogonales. Si además todo $x \in W$ es de norma 1 se dice que W es un sistema ortonormal.

Definición 4: Dado un espacio de Hilbert separable $\{H, \langle , \rangle\}$ y dado W un sistema ortonormal en H, se dice que W es maximal si no existe un vector v no nulo que sea ortogonal a todos los vectores de W.

Teorema 1: Dado un espacio de Hilbert separable $\{H, \langle , \rangle\}$, si $W = \{w_n\}_{n \in N} \subset H$ es un sistema ortonormal maximal, entonces cada vector $x \in H$ admite

$$x = \sum_{n \in N} a_n w_n$$

Teorema 2 (Teorema de representación de Riesz): Si $\{H, \langle , \rangle\}$ es un espacio de Hilbert separable definido sobre K, entonces toda aplicación lineal y continua $T : \{H, \langle , \rangle\} \to \{K, \langle , \rangle\}$ lleva asociado un vector v de H tal que:

$$T(x) =' \langle x, v \rangle \quad \forall x \in H$$

Además se verifica que: $\|T\| = \|v\|$.