ESPACIOS MÉTRICOS

Definición 1: Dado un conjunto vacío E, se dice que una función $d: E\times E \to |$ es una *distancia* si verifica las siguientes propiedades:

1. $d(x,y)\geq 0 \quad \forall x,y\in E$.
2. $d(x,y)=0 \leftrightarrow x=y$.
3. $d(x,y)=d(y,x) \quad \forall x,y\in E$.
4. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y) \quad \forall x,y,z\in E$.

Cada conjunto E dotado de una distancia d forma un espacio métrico, que se denota por $\{E,d\}$.

Definición 2: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$, para cada punto $x\in E$ y para cada $r>0$ se define la *bola abierta de centro x y radio r* como el conjunto:

$$B(x,r)=\{e\in E; d(x,e)<r\}$$

Cuando se trabaje con un mismo conjunto E y varias distancias, d y D, sobre E, se usará la notación $B_d(x,r)$ o $B_D(x,r)$ para indicar respecto a que distancia se toma cada bola.

Definición 3: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$ se dice que un *conjunto $A\subset E$ es abierto* si A es vacío o es unión de bolas abiertas.

Definición 4: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$ se dice que un *conjunto $A\subset E$ es cerrado* si el conjunto $E\setminus A=\{x\in E; x\notin A\}$ es abierto.

Por otro lado, se define la bola cerrada de centro x y radio $r\geq 0$, y se escribe $B^c(x,r)$, como el conjunto:

$$B^c(x,r)=\{e\in E; d(x,e)\leq r\}$$

Definición 5: Dado un conjunto no vacío E y dos distancias d y D definidas sobre E, se dice que d y D son distancias equivalentes si se verifica:

1. Para toda bola $B_d(x,r)$ existe un radio $s>0$ tal que
$$B_D(x,s)\subset B_d(x,r)$$

2. Para toda bola $B_D(y,t)$ existe un radio $f>0$ tal que
$$B_d(y,t)\subset B_D(y,t)$$

Definición 6: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$, un conjunto $A \subset E$ y un punto $x \in E$ se dice que:

1. x es un *punto interior* de A si existe un $r>0$ tal que $B(x,r) \subset A$.

El conjunto formado por todos los puntos interiores de A se denotará por $\overset{\circ}{A}$

2. x es un *punto de adherencia* de A si para toda $B(x,r)$ se verifica que $B(x,r) \cap A \neq 0$.

El conjunto formado por todos los punto de adherencia de A se denotará por $\overline{A}$.

3. x es un *punto de acumulación* de A si para toda $B(x,r)$ se verifica que $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \phi$.

El conjunto formado por todos los puntos de acumulación de A se denotará por A'.

4. x es un *punto frontera* de A si para toda $B(x,r)$ se verifica que $B(x,r) \cap A \neq \phi$ y $B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \phi$.

El conjunto formado por todos los puntos frontera de A se denotará por $fr(A)$.

Definición 7: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$ y dos conjuntos $D, B \subseteq E$, se dice qu e D es denso en B si se verifica que $B \subset \overline{D}$.

Cuando dentro de un espacio métrico $\{E,d\}$ existe un conjunto D denso en E que además tiene una cantidad infinita de puntos, o una cantidad infinita pero numerable de puntos, se dice que $\{E,d\}$ es separable.

Definición 8: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$, se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n \in N} \subset E$ es convergente a un punto $x \in E$, y se escribe $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, o también $\{x_n\}_{n \in N} \to x$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Cuando una sucesión $\{x_n\}_{n \in N}$ no converge a ningún punto se dice que es no convergente.

Definición 9: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$ se dice que un conjunto $A \subset E$ es acotado si existe una bola que lo contiene.