ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS, CONJUNTOS COMPACTOS Y CONJUNTOS CONEXOS

Definición 1: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$, se dice que una *sucesión* $\{x_n\}_{n\in N} \subset E$ *es de Cauchy o fundamental* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in N$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m \geq 0$.

Definición 2: Se dice que un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición 3: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$ se dice que un conjunto $K \subset E$ es *compacto* si para toda la familia de conjuntos abiertos $\{A_i\}_{i\in I}$ que cubra a K, es decir, que verifique

$$\bigcup_{i\in I} A_i \supset K$$

Se puede extraer una cantidad finita de conjuntos abiertos $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}\}$ que cubre a K, es decir que

$$\bigcup_{j\in\{1,2,\ldots,p\}} A_{i_j} \supset K$$

Definición 4: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$ se dice que un conjunto $K \subset E$ es *totalmente acotado* si para todo $r > 0$ existe una cantidad finita de bolas de radio r y que cubre a K.

Teorema 1: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$ se dice que un conjunto $K \subset E$ las siguientes propiedades son equivalentes

I) K es un compacto

II) K es totalmente acotado y completo

III) Toda sucesión $\{x_n\}_{n\in N} \subset K$ posee una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k\in N} \to x$ tal que $x \in K$.

Teorema 2: En el espacio métrico $\{K^n, d_e\}$ $(K = \mathrm{R} \text{ o } C \text{ y } n \in N)$ un conjunto K es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.

Definición 5: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$ y un conjunto $C \subset E$ no vacío, se dice que C o es *conexo* si existen dos abiertos A y B en E tales que:

I). Cada abierto interseca a C, es decir, que $A \cap C \neq \phi$ y $B \cap C \neq \phi$.

II). $A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C) = \phi$

III). $C \subset A \cup B$.

Proposición 1: En todo espacio métrico $\{E,d\}$ los conjuntos conexos verifican las siguientes propiedades:

1. Dado otro espacio métrico $\{F,D\}$ y dos conjuntos conexos $C \subset E$ y $D \subset F$ el conjunto $C \times D$ es conexo en $\{E \times F, d_x\}$.

2. Si C y D son conexos y verifican que

$$\overline{C} \cap D \neq \phi$$

entonces el conjunto $C \cup D$ es también conexo.

3. Si los conjuntos $\{C_i\}_{i \in I}$ son conexos y verifican que

$$\bigcap_{i \in I} C_i \neq \phi$$

entonces el conjunto $\bigcup_{i \in I} C_i$ es también conexo.