ESPACIOS NORMADOS Y DE BANACH

Definición 1: Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $K(K = R \text{ o } C)$. Se dice que una función $\|\cdot\| : X \to R$ es una norma si verifica las siguientes propiedades:

I. $\|x\| \geq 0 \ \ \forall x \in X$.

II. $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$.

III. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \ \forall x \in X, \ \forall \lambda \in K$.

IV. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \ \forall x, y \in X$.

Cada espacio vectorial X dotado de una norma $\|\cdot\|$ forma un espacio normado, que se denota por $\{X, \|\cdot\|\}$.

Definición 2: Dado un espacio vectorial X y dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definidas sobre X, se dice que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes si las distancias asociadas $d_{\|\cdot\|_1}$ y $d_{\|\cdot\|_2}$ son equivalentes.

Teorema 1: Si X es un espacio vectorial sobre K de dimensión finita, entonces todas las normas definidas sobre X son equivalentes entre sí.

Teorema 2 (Teorema de Riesz): Dado un espacio normado $\{X, \|\cdot\|\}$ se verifica que X tiene dimensión finita si y sólo si la bola unidad cerrada, $B^c(0,1)$, es compacta.

Definición 3: Dado un espacio normado $\{X, \|\cdot\|\}$ y dad una sucesión de vectores en $X \{x_n\}_{n \in N}$, se dice que la serie $\sum x_n$ es convergente si existe el siguiente límite:

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{n=1}^{n=p} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Cuando no existe es te límite se dice que la serie $\sum x_n$ es divergente.