FUNCIONES CONTINUAS ENTRE ESPACIOS MÉTRICOS

Definición 1: Dado dos espacios métricos $\{E,d\}$ y $\{F,D\}$ y dada una función $f:\{E,d\}\rightarrow\{F,D\}$ se dice que f *es continua en un punto* $e_0 \in E$ si verifica que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$f(t)\in B_D(f(t_0),\varepsilon) \text{ para todo } e \in B_d(e_0,\delta)$$

Se dice que f *es continua en un conjunto* $A \subset C$ si f es continua en todos los puntos $e_0 \in A$. Cuando se dice simplemente que f es continua significa que es continua en todos los puntos e_0 de E.

Proposición 1: Dado un espacio métrico $\{E,d\}$ y dos funciones f y g definidas de $\{E,d\}$ en $\{\mathrm{R},d_e\}$, si f y g son continuas en el punto a entonces las funciones $f+g$, $f-g$ y $f\cdot g$ también son continuas en a. Además si $g(a)\neq 0$ entonces la función $1/g$ es también continua en a.

Proposición 2: Dados tres espacios métricos $\{E,d_1\}$, $\{F,d_2\}$, $\{G,d_3\}$ y dos funciones $f:\{E,d_1\}\rightarrow\{F,d_2\}$ y $g:\{F,d_2\}\rightarrow\{G,d_3\}$, si f es continua en a y en g es continua en $f(a)$ entonces la *función composición* $g\circ f:\{E,d_1\}\rightarrow\{G,d_3\}$ es continua en a.

Definición 2: Una función $f:\{E,d\}\rightarrow\{F,D\}$ es *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $D(f(x),f(y)) < \varepsilon$ para todo par de puntos $x,y \in E$ que verifiquen que $d(x,y) < \delta$.

Proposición 3: Dada una función $f:\{E,d\}\rightarrow\{F,D\}$ se verifican las siguientes propiedades:

1. Si E es compacto y f es continua entonces f es uniformemente continua.

2. Si f verifica la condición de Lipschitz, esto es, que existe una constante $K > 0$ tal que para todo par de puntos x, y en E se verifica la desigualdad

$$D(f(x),f(y)) \leq Kd(x,y)$$

entonces f es uniformemente continua.

Teorema 1: Si una función $f:\{E,d\}\rightarrow\{E,d\}$ es contractiva, es decir, f verifica la condición de Lipschitz con constante $K<1$ y $\{E,d\}$ es *completo*, entonces existe un punto $x \in E$ y sólo uno tal que $f(x)=x$.