FORMA POLAR de NÚMEROS COMPLEJOS

Sea $z = a + bi$

$$\left.\begin{array}{l} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{array}\right\} z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\rho = |z| = \operatorname{mod} z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arg z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

TEOREMA de DE MOIVRE

$$z^n = [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

RAÍCES de NÚMEROS COMPLEJOS

$$\omega^n = z \rightarrow \omega = z^{1/n}$$

$$z^{1/n} = z_k = [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^{1/n} = \rho^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

$$k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

$$\rho = \sqrt{a+b}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

FÓRMULA de EULER

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\boxed{z_k = \rho^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right] = \rho^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}}$$

FUNCIONES UNÍVOCAS y MULTÍVOCAS

Si a cada valor de z corresponde sólo un valor de, decimos que ω es una *función unívoca* de z o que $f(z)$ es unívoca. Si más de un valor de ω corresponde a cada valor de, decimos que ω es una *función multívoca* o *multiforme* de.

Una función multivaluada puede considerarse como una colección de funciones unívocas; cada miembro de esta colección será llamado una *rama* de la función. Se acostumbra considerar un miembro particular como una *rama principal* de la función multívoca y el valor de la función correspondiente a esta rama como el *valor principal*.

TRANSFORMACIONES

Si $\omega = u + iv \rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{array}\right\} \rightarrow \omega = u(x,y) + iv = v(x,y)$

FUNCIONES ELEMENTALES

1. Funciones exponenciales

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$z^c = e^{c \cdot \ln z} = \exp[c \cdot \ln z];\ z, c \in |$$

2. Funciones trigonométricas

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \qquad \cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

3. Funciones hiperbólicas

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \coth z = \frac{1}{\tanh z} = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

$$\sin iz = i\sinh z \qquad \cos iz = \cosh z \qquad \tan iz = i\tanh z$$

$$\sinh iz = i\sin z \qquad \cosh iz = \cos z \qquad \tanh iz = i\tan z$$

4. Funciones logarítmicas

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi n) = \ln|z| + i\arg z = \ln r + i\theta$$

$$\log_a^z = \frac{\ln z}{\ln a}$$

5. **Funciones trigonométricas inversas**

$$\sin^{-1} z = 2\pi k + \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \qquad \csc^{-1} z = 2\pi k + \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$$

$$\cos^{-1} z = 2\pi k + \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \qquad \sec^{-1} z = 2\pi k + \frac{1}{i}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$\tan^{-1} z = \pi k + \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \cot^{-1} z = \pi k + \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$$

6. **Funciones hiperbólicas inversas**

$$\sinh^{-1} z = 2\pi ki + \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \qquad \operatorname{csch}^{-1} z = 2\pi ki + \ln\left(\frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = 2\pi ki + \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \qquad \operatorname{sech}^{-1} z = 2\pi ki + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \pi ki + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad \coth^{-1} z = \pi ik + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

DERIVADA

Si $f(z)$ es unívoca en alguna región $\Re$ del plano, la *derivada* de $f(z)$ está definida como:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Si el límite existe independientemente de la manera como. En tal caso decimos que $f(z)$es diferenciable en. En la de definición anterior de derivada algunas veces usamos h en vez de. Aunque la diferenciabilidad implica continuidad, lo recíproco no es cierto.

FUNCIONES ANALÍTICAS

Si la derivada $f'(z)$ existe en todo punto z de una región, entonces diremos que $f(z)$ es analítica en $\Re$ y nos referiremos a ella como una *función analítica* en. Los términos *regular* y *holomorfa* son usados algunas veces como sinónimos de analítica.

Una función $f(z)$es llamada *analítica en un punto*, si existe una vecindad, tal que en cada punto de ella $f'(z)$ exista.

ECUACIONES de CAUCHY-RIEMANN

Una condición necesaria para que $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica en una región $\Re$ es que, en, u y v satisfagan las ecuaciones de *Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Si las derivadas parciales anteriores son continuas en, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones suficientes para que $f(z)$ sea analítica en.

Las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son llamadas algunas veces *funciones conjugadas*. Dada una, podemos encontrar la otra (salvo una constante aditiva arbitraria) tal que $u + iv = f(z)$ sea analítica.

FUNCIONES ARMÓNICAS

Si las segundas derivadas parciales de u y v con respecto a x e y existen y son continuas en una región, entonces deducimos de las condiciones de Cauchy-Riemann que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Se deduce, en esas condiciones, que las partes real e imaginaria de una función analítica satisfacen la *ecuación de Laplace* denotada por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{o} \qquad \nabla^2 \psi = 0 \qquad \text{donde} \qquad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

El operador ∇^2 es llamado usualmente el *laplaciano.*

Funciones tales como $u(x,y)$ y $v(x,y)$ las cuales satisfacen las ecuaciones de Laplace en una región, son llamadas funciones *armónicas en*.

REGLAS de DIFERENCIACIÓN

1. $\frac{d}{dz}\left[f(z) + g(z)\right] = f'(z) + g'(z)$
2. $\frac{d}{dz}\left[f(z) - g(z)\right] = f'(z) - g'(z)$
3. $\frac{d}{dz}\left[c(z)\right] = cf'(z)$
4. $\frac{d}{dz}\left[f(z) \cdot g(z)\right] = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$

5. $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{[g(z)]^2}$ donde $g(z)\neq 0$

DERIVADAS de FUNCIONES ELEMENTALES

1. $\frac{d}{dz}(c)=0$
2. $\frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}$
3. $\frac{d}{dz}e^z=e^z$
4. $\frac{d}{dz}a^z=a^z\ln a$
5. $\frac{d}{dz}\sin z=\cos z$
6. $\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z$
7. $\frac{d}{dz}\tan z=\sec^2 z$
8. $\frac{d}{dz}\cot z=-\csc^2 z$
9. $\frac{d}{dz}\sec z=\sec z\tan z$
10. $\frac{d}{dz}\csc z=-\csc z\cot z$
11. $\frac{d}{dz}\log_e z=\frac{d}{dz}\ln z=\frac{1}{z}$
12. $\frac{d}{dz}\log_a z=\frac{\log_e z}{z}$
13. $\frac{d}{dz}\sin^{-1}z=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
14. $\frac{d}{dz}\cos^{-1}z=\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$
15. $\frac{d}{dz}\tan^{-1}z=\frac{1}{1+z^2}$
16. $\frac{d}{dz}\cot^{-1}z=\frac{-1}{1+z^2}$
17. $\frac{d}{dz}\sec^{-1}z=\frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$
18. $\frac{d}{dz}\csc^{-1}z=\frac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$
19. $\frac{d}{dz}\sinh^{-1}z=\cosh z$
20. $\frac{d}{dz}\cosh^{-1}z=\sinh z$
21. $\frac{d}{dz}\tanh^{-1}z=\text{sech}^2 z$
22. $\frac{d}{dz}\coth^{-1}z=-\text{csch}^2 z$
23. $\frac{d}{dz}\text{sech}^{-1}z=-\text{sech}z\tanh z$
24. $\frac{d}{dz}\text{csch}^{-1}z=-\text{csch}z\coth z$
25. $\frac{d}{dz}\sinh^{-1}z=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
26. $\frac{d}{dz}\cosh^{-1}z=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$
27. $\frac{d}{dz}\tanh^{-1}z=\frac{1}{1-z^2}$
28. $\frac{d}{dz}\coth^{-1}z=\frac{1}{1-z^2}$
29. $\frac{d}{dz}\text{sech}^{-1}z=\frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$
30. $\frac{d}{dz}\text{csch}^{-1}z=\frac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$

La REGLA de l'HÔPITAL

Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas en una región que contiene el punto z_0 y supongamos que $f(z_0)=g(z_0)=0$ pero. Entonces la *regla de L'Hôpital* dice que

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

En el caso en que, la regla puede extenderse.

PUNTOS SINGULARES

Un punto en el cual $f(z)$ deja de ser analítica es llamado un punto singular o singularidad de. Existen varios tipos de singularidades.

1. **Singularidades aisladas.** El punto $z=z_0$ es una *singularidad aislada* o *punto singular aislado* de $f(z)$ si podemos encontrar un $\delta>0$ tal que el círculo $|z-z_0|=\delta$ no encierre puntos singulares distintos de z_0 (es decir, existe una vecindad de z_0 de radio δ sin singularidades). Si δ no puede ser encontrado, decimos que z_0 es una *singularidad no aislada*.

   Si z_0 no es un punto singular y podemos encontrar un $\delta>0$ tal que $|z-z_0|=\delta$ no encierre puntos singulares, decimos que z_0 es un *punto ordinario de*.

2. **Polos.** Si podemos encontrar un entero positivo n tal que, entonces $z=z_0$ es llamado un *polo de orden*. Si, z_0 es llamado un *polo simple*.

   Si $g(z)=(z-z_0)^n f(z)$, donde $f(z_0)\neq 0$ y n es un entero positivo, entonces $z=z_0$ es llamado un *cero de orden* n de. Si, z_0 es llamado un *cero simple*. En tal caso z_0 es un polo de orden n de la función.

3. **Puntos de ramificación** de funciones multívocas, son puntos singulares.

4. **Singularidades removibles.** El punto singular z_0 es llamado una *singularidad removible* de $f(z)$ si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe.

5. **Singularidades esenciales.** Una singularidad que no es un polo, ni un punto de ramificación, ni singularidad removible es llamada una *singularidad esencial.*

   Si una función unívoca tiene una singularidad, entonces la singularidad es o un polo o una singularidad esencial. Por esta razón un polo es llamado a veces una *singularidad evitable*. Equivalentemente, $z = z_0$ es una singularidad esencial si no podemos encontrar algún entero n tal que.

6. **Singularidades en el infinito.** El tipo de si singularidad de $f(z)$ en $z=\infty$ (el punto en el infinito) es el mismo como el de $f(1/\omega)$ en.

INTEGRALES REALES de LÍNEA

$$\boxed{\int_C [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]} \text{ o } \boxed{\int_C Pdx + Qdy}$$

CONEXIÓN entre INTEGRALES REAL y COMPLEJA de LÍNEA

Si $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u+iv$ la integral compleja de línea se puede expresar en términos de integrales reales de línea como

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy}$$

TEOREMA de GREEN en el PLANO

$$\boxed{\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{\Re}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy}$$

FORMA COMPLEJA DEL TEOREMA DE GREEN

$$\boxed{\oint_C F(z,\bar{z})dz = 2i\iint_{\Re} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\, dA}$$

TEOREMA de CAUCHY. El TEOREMA de CAUCHY-GOURSAT

Sea $f(z)$ analítica en una región $\Re$ y sobre su frontera. Entonces

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 0}$$

TEOREMA de MORERA

Sea $f(z)$ continua en una región simplemente conexa

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 0}$$

FÓRMULAS INTEGRALES de CAUCHY

Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C y a es un punto dentro de, entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

Donde C se recorre en el sentido (contra las manecillas del reloj) positivo.

También la n-ésima derivada de $f(z)$ en $z=a$ está dada por

$$\boxed{f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

ALGUNOS TEOREMAS IMPORTANTES

La siguiente es una lista de algunos teoremas importantes que son consecuencias de las fórmulas integrales de Cauchy.

1. **Teorema de Morera** (recíproco del teorema de Cauchy).

   Si $f(z)$ es continua en una región $\Re$ simplemente conexa y si $\oint_C f(z)dz = 0$ alrededor de cada curva simple cerrada C en $\Re$, entonces, $f(z)$ es analítica en $\Re$.

2. **Desigualdades de Cauchy.**

   Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre un círculo C de radio r y centro en $z=a$, entonces

   $$\left|f^n(a)\right| = \leq \frac{M\cdot n!}{r^n} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

   donde M s una constante tal que $|f(z)| < M$ sobre C, o sea M es una cota superior de $|f(z)|$ sobre C.

3. **Teorema de Liouville.**

Supongamos que para todo z en el plano complejo entero, (i) $f(z)$ es analítica y (ii) $f(z)$ es acotada, es decir, $|f(z)| < M$ para alguna constante M. Entonces $f(z)$ debe ser una constante.

4. **Teorema fundamental del álgebra.**

Cada ecuación polinomial $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$ con grado $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$ tiene por lo menos una raíz.

De esto se deduce que $P(z) = 0$ tiene exactamente n raíces, teniendo en cuenta la multiplicidad de las raíces.

5. **Teorema del valor medio de Gauss.**

Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre el círculo C con centro en a y radio r, entonces $f(a)$ es el promedio de los valores de $f(z)$ sobre C es decir,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right)d\theta$$

6. **Teorema del módulo máximo.**

Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C y no es idénticamente igual a una constante, entonces el valor máximo de $|f(z)|$ ocurre sobre C.

7. **Teorema del módulo mínimo.**

Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C y $f(z) \neq 0$ dentro de C, entonces $f(z)$ toma su valor mínimo sobre C.

8. **El teorema del argumento.**

Sea $f(z)$ es analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C excepto para un número finito de polos dentro de C. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$

donde N y P son, respectivamente, el numero de ceros y de polos de $f(z)$ dentro de C.

9. **Teorema de Rouché.**

Si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas dentro y sobre una curva simple cerrada C y si $|g(z)| < |f(z)|$ sobre C, entonces $f(z) + g(z)$ y $f(z)$ tienen el mismo número de ceros dentro de C.

10. **Fórmulas integrales de Poisson para un círculo.**

Sea $f(z)$ analítica dentro y sobre el círculo C definido por $|z| = R$. Entonces, $z = re^{i\theta}$ es un punto dentro de C tenemos

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(R^2 - r^2\right)f\left(re^{i\theta}\right)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi$$

Si $u(r,\theta)$ y $v(r,\theta)$ son la parte real e imaginaria de $f\left(re^{i\theta}\right)$ mientras que $u(R,\phi)$ y $v(R,\phi)$ son la parte real e imaginaria de $f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)$, entonces

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(R^2 - r^2\right)u(r,\phi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi$$

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(R^2 - r^2\right)u(R,\phi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi$$

Estos resultados se llaman, *fórmulas integrales de Poisson para un círculo.*:Ellas expresan los valores de una función ármonica dentro de un círculo, en términos de sus valores sobre la frontera.

11. **Fórmulas integrales de Poisson para un semi-plano.**

Sea $f(z)$ analítica en el semi-plano superior $y \geq 0$ del plano z y sea $\varsigma = \xi + i\eta$ un punto en este semi-plano superior. Entonces

$$f(\varsigma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta f(x)}{(x - \xi)^2 + \eta^2}dx$$

En términos de las partes real e imaginaria de $f(\varsigma)$ ésta puede escribirse

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta u(x,0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2}dx$$

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta v(x,0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2}dx$$

Estas se llaman, *fórmulas integrales de Poisson para un semi-plano*. Ellas espresan los valores de una función ármonica en el semi-plano superior en términos de los valores el eje x (la frontera) del semi-plano.

RESIDUOS

Sea $f(z)$ unívoca y analítica dentro y sobre el círculo C excepto en su centro, el punto $z=a$. Entonces:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Donde en el caso especial $n=-1$ tenemos:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^p}=\begin{cases} 2\pi i & p=1 \\ 2\pi i & p=\text{entero}\neq 1\end{cases}$$

a_{-1} se llama residuo de $f(z)$ en $z-a$

CÁLCULO de RESIDUOS

En el caso donde $z-a$ es un polo de orden k n una fórmula simple para a_{-1} dada por

$$\boxed{a_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right]}$$

Si $k=1$ (polo simple) el resultado es muy simple y está dado por:

$$\boxed{a_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)}$$

Si $z=a$ es una singularidad esencial, el residuo se puede, algunas veces, encontrar usando desarrollos conocidos en series.

El TEOREMA del RESIDUO

Sea $f(z)$ unívoca y analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C excepto en las singularidades $a,b,c,\ldots$ Entonces el *teorema del residuo* dice que

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i(a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\ldots)}$$

es decir, la integral de $f(z)$ alrededor de C es $2\pi i$ veces las suma de los residuos de $f(z)$ en las singularidades encerradas por C.

CÁLCULO de INTEGRALES DEFINIDAS

1. $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$, $F(x)$ es una función racional

Consideraremos $\oint_C F(z)dz$ a lo largo de un contorno C que consiste del segmento sobre el eje x desde $-R$ a R y el semi-círculo Γ encima del eje x que tiene como diámetro el segmento. Entonces hacemos que $R\to\infty$. Si $F(x)$ es una función par, esto se puede utilizar para calcular $\int_0^{\infty} F(x)dx$

$\oint_C F(z)dz=\int_{-R}^{R}F(x)dx+\int_\Gamma F(z)dz$ y sabiendo que $\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx = 2\int_0^{\infty}F(x)dx$ entonces:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx=2\int_0^{\infty}F(x)dx=\oint_C F(z)dz = 2\pi i\sum(a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\ldots)\,\text{de } F(z)\,\text{al semiplà } \operatorname{Im} z>0}$$

2. $\int_0^{2\pi} G(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ es una función racional de $\sin\theta$ y $\cos\theta$

Sea $z=e^{i\theta}$. Entonces $\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}$, $\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$ y $dz=ie^{i\theta}d\theta \to d\theta=\frac{dz}{iz}$.

Entonces la integral es equivalente a $\oint_C F(z)dz$ donde C es el círculo unidad con centro en el origen.

$$\boxed{\int_0^{2\pi}G(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=\oint_C F(z)dz = 2\pi i\sum(a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\ldots)\,\text{de } G(\sin\theta,\cos\theta)d\theta\,\text{ dins del cercle } |z|<1}$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \sin mx\end{Bmatrix}dx$, $F(x)$ es una función racional.

En este caso consideremos $\oint_C F(z)e^{imz}dz$ donde C es el mismo contorno que en 1.

$$\oint_C F(z)e^{imz}dz=\int_{-R}^{R}F(x)e^{imx}dx+\int_\Gamma F(z)e^{imz}dz=\int_{-R}^{R}F(x)\cos mx dz+i\int_{-R}^{R}F(x)\sin mx dz+\int_\Gamma F(z)e^{imz}dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \sin mx\end{Bmatrix}dx=\int_{-R}^{R}F(x)\cos mx dz+i\int_{-R}^{R}F(x)\sin mx dz=\oint_C F(z)e^{imz}dz$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \sin mx\end{Bmatrix}dx=\sum 2\pi i(a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\ldots)\,\text{de } F(z)e^{imz}\,\text{ al semiplà } \operatorname{Im} z>0}$$